**题目**：

Adaptive Beamforming With Compressed Sensing for Sparse Receiving Array

——用于稀疏接收阵列的压缩感知自适应波束形成

**摘要**：

本文提出了一种针对稀疏接收阵列的基于压缩感知的自适应数字波束形成方法。由于到达信号的角度稀疏性，压缩感知可以被运用到对接收信号的采样上去。然后，从天线孔径中缺失的阵元上获得的接收信号可以通过压缩感知理论来重建。自适应数字波束形成算法被运用来形成天线波束，所形成的波束主瓣指向期望信号的方向，并且零点指向干扰的方向。

**第一节、Introduction 简介**

在双基地雷达系统中，迫切需要数字波束形成接收阵列天线，以使得接收到的天线波束能够灵活地覆盖发射天线波束。在雷达接收站中，为了得到较高的天线增益以及角度测量精度，应该采用天线阵元个数较多的天线。在射电天文系统中，仍然严重需要具有大量天线阵元的接收天线阵列。另一方面，对于大规模的天线阵列来说，成本太高仍然是它的一个主要缺点。与此同时，计算负担和高速率数据传输是自适应波束形成算法的实现中的两个瓶颈。为了减少射频前端的数量，同时不减少阵列孔径，可以利用稀疏阵列。稀疏阵列是很有吸引力的，因为和完全填充的阵列相比，稀疏阵列能够减少阵元个数。这对于雷达应用来说是非常有兴趣的，因为大阵列孔径有助于角度精度和分辨率的提高以及接近干扰方向的目标的检测。通过利用稀疏阵列，这些方面的性能能够在减少接收信道个数，权值，功耗以及成本大小的前提下达到，就好比简单的平面集成一样。稀疏等间隔阵列会不可避免地产生栅瓣，进而减小光束的扫描范围。为了避免出现栅瓣，稀疏阵列通常被设计为非均匀的。非均匀阵列，或者称之为非周期阵列，已经被研究了数十年。研究者们已经找到了许多种能够有效解决他们固有的高旁瓣的算法，这些高旁瓣在有干扰的环境中会降低阵列的性能。

通常，要想减少天线阵元数目，需要进行非均匀阵列的设计。在过去的50年中，为了综合这样的阵列（非均匀阵列），提出了许多的技术。最常见的是随机方法，比如遗传算法，粒子群优化，蚁群算法以及模拟退火法。最近，矩阵铅笔法被有效的运用到已被聚焦和塑形后的波束图的重建中，与此同时也减少了阵元的个数。差分演化法和稀疏周期混合阵列法也是减少旁瓣水平的好方法。在文献[9]和[10]中，提出了一种通过凸优化选择天线合成稀疏阵列的过程。在文献[11]和[12]中，提出了一种基于贝叶斯压缩采样的稀疏阵列模式合成方法。然而，这些方法仅能够优化固定波束，但当需要自适应的抑制干扰的时候，这些方法却很难保证波束图的性能。

最近，Candes和Donoho提出了一种新颖的叫做压缩感知（也叫作压缩采样）的采样理论。该理论基于矩阵分析，统计概率理论，拓扑几何，优化，功能分析等，是一种新开发的信息采集和处理的理论框架。CS理论认为，可以从比传统方法使用的样本或测量少得多的样本或测量中恢复某些信号和图像。为了实现这个目的，压缩感知依赖于一个准则：感兴趣信号的稀疏性。CS理论指出，只要信号是稀疏或可压缩的，就可以有很大可能通过解决一个优化问题从少量的数据样本中恢复出原始信号。压缩感知理论现已被广泛应用在天文学、数据获取、DOA估计、认知无线电、雷达、光学成像以及许多其他的领域。一些研究者对硬件实现也感兴趣，实现了许多简单的硬件结构。

本文提出了一种基于压缩感知的针对大规模稀疏接收阵列的自适应数字波束形成技术。由于来波信号的角度稀疏性，压缩感知理论可以被用于利用接收天线对来波信号进行采样，然后，天线结构中缺失阵元上的接收信号可以利用正交匹配追踪算法进行重建。自适应数字波束形成技术随后被应用来形成天线波束，该波束的主瓣指向期望方向，旁瓣（凹陷）则指向干扰的方向。采用所提出的自适应数字波束形成技术，能够大大减少阵元个数，同时也能够保证具有同原始全阵列相同的性能，这意味着波束图在干扰方向具有较低的旁瓣和较深的凹陷，并且没有栅瓣。蒙特卡洛仿真实验表明本文所提方法形成的波束性能与原始全阵列的波束性能相近，而实际阵元个数能够得到较大的减少。

本文组织安排如下：下一节中，讨论了基于压缩感知的数字波束形成的原则和数学模型；然后在第三节中，提出了一种阵元位置优化算法；第四节中，当目标不在网格中时，提出了一种能够提高结果（性能）的方法；在第五节中，提供了许多不同情况下的仿真实验结果，用以证明算法的正确性；第六节是本文的结论部分。

**第二节、The Principle Of The Algorithm 算法的基本原则**

这一部分主要是一些基础理论的讲解，包括基于均匀线阵的信号模型（**A段）**、压缩感知基本原理和其最常见的恢复算法—正交匹配追踪（OMP）算法（**B段**）以及经典的两种数字自适应波束形成算法—正交投影算法和迭代LCMV算法的基本原理（**C段**）。总体来说是基础理论部分，其中A和B段和自己之前总结过的一致，不用详细看，下面给出A、B两段内容中与论文初稿中压缩感知部分之间的区别与联系进行分析与解释：

阵列选取的是均匀线阵，阵元个数设为，阵元间距设为半波长；信号个数假设为个，分别从个不同方向入射到阵列上，每一个信号对应的信号幅度和入射角度分别设为，接收信号可写为：

，

其中，表示入射角上的导向矢量：



将90°- 90°的角度范围均匀划分成份，定义转换矩阵：

，维

则接收信号可表示为： ，

其中，，为维，只是其中的个非零值。（这里都不考虑噪声的影响）

设计一个测量矩阵，为维，,与不相关。则可以定义压缩测量值如下：

，为维

称为传感矩阵（同毕业论文），大小为；要想保证能够从的个样本中恢复出具有个元素的原始信号，则传感矩阵必须满足受限等距特性。然后利用接收到的压缩测量值可以首先计算出，然后就可以利用公式恢复出原始信号。

**上述的理论介绍与之前自己已经推过的基于均匀线阵的信号接收输出模型以及压缩感知的基本原理是一致的，这里有必要将他们之间的对应关系说一下：**

1）、信号模型中，CS基础理论说的是一具有N个离散实值的离散信号，而这里直接说

的是采用具有N个阵元的均匀线阵，如果假设信号只有一个的话，其实这两种表

述是一致的，均表示信号是由N个离散的值所组成。

2）、信号模型中的导向矢量是在这个地方的必要说明，与CS基础理论中的变量没有

对应关系。至于定义的转换矩阵H，则是与稀疏基相对应，而对应的则是

稀疏系数矩阵。

3）、测量矩阵对应的则是CS基础理论中的测量矩阵，这两个变量是一致的，均是

维。传感矩阵与CS基础理论中的是一致的，压缩测量值对应的则是，两者都表示最终获得的压缩测量值，这个值是进行压缩恢复的关键。

**C 两种数字自适应波束形成方法（OPA和LCMV）**

**第三节、Optimization Of The Positions Of The Elements 阵元位置优化算法（全文的重点）**

在这一节，本文提出了一种能够帮助减少恢复误差的阵元位置优化算法。首先，定义恢复误差：



其中，表示恢复信号，表示原始信号，norm表示。。。。

Candes和Tao指出：如果想要完全的重构信号，传感矩阵必须保证两个不同的稀疏信号不会被映射到同一个集合。这里，我们定义相关系数矩阵的元素如下：



为了完整的恢复信号，我们应该使得相关系数尽可能的小（这里的相关系数指的是两个不同信号通过传感矩阵之后所得到的信号相关性，这种相关性体现在矩阵）。**当给定转换矩阵之后，我们可以通过优化测量矩阵来获得最优的相关系数**。最近一段时间已经提出了许多的优化方法（后续是介绍了三种优化方法，分别有一篇参考文献），但是通过这些方法优化的测量矩阵达不到本文的要求。这里的优化中，显示的是阵元的位置，而且可以通过随机的从大小为的单位阵中选取行而得到。也就是说，是由大量的零值和少量的非零值所组成。因此，我们选择了一种遗传算法来优化阵元的位置。（这里的遗传算法的参考论文是：Chen, K., He, Z., and Han, C.A modified real GA for the sparse linear array synthesis with multiple constraints. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 54, 7(2006), 2169–2173.）

我们进行优化的目的是**最小化相关系数**，因为相关系数越大，恢复误差也就会越大。我们希望较大的相关系数能够变得尽量的小，因此定义了如下的代价函数：

 （19）

我们增加较大的相关系数的权值，对于代价函数的贡献会随着相关系数的增长而变大。参数表示的是增长的数量级。

我们考虑如下的的网格。为了简单，我们给这些网格标号，这里的表示网格的大小。相邻网格点之间的距离就是，这里将会选择其中的个网格点。遗传算法在这里是被用来优化阵元位置。由于阵元之间的互耦，相邻阵元之间的距离不能太小。这里，设定最小阵元间距为半波长：。

为了保证阵元间距是大于半波长，这里生成了一个父母向量：



其中，，表示第个阵元的位置，。对于，。向量可以用以下方法得到：在范围内随机地产生个整数，然后按照从小到大的顺序进行排序。向量是一个常数向量。

很容易证明上面生成的每个个体都满足前述要求（阵元间距小于半波长？？），我们通过采用上述方法生成个个体来初始化一个组。为了避免遗传操作后的后代中的不可行解，我们对父群体矩阵进行如下预处理。

假设父群体矩阵满足所有的要求，则父群体可以写为：



父群体矩阵F中的每列表示阵元分布的方式。假设：



我们通过下式来获得遗传信息矩阵

遗传信息矩阵与具有相同的信息，因此我们可以做诸如对遗传信息矩阵的交叉和突变等常见的遗传操作。



遗传算法的详细步骤如下：

1. 初始化迭代次数，利用上述方法产生具有个个体的父群体矩阵；
2. 处理父群体矩阵，进而获得遗传信息矩阵；
3. 利用代价函数计算所有个体的代价值，然后，从中选择突出的遗传信息；
4. 做遗传算法操作，包括对所选择的遗传信息的交叉和突变。然后，获得新的遗传信息矩阵；
5. 获得最新的父群体矩阵，获得方法是公式：
6. 如果满足终止准则，则停止；否则，进入第2）步继续迭代，同时修改。

**第四节、Targets Not On The Grid 目标不在网格内（全文的重点）**

到目前为止，在我们的框架中，信号位置的估计是被限制在网格中的。当信号不处于这个网格中的时候，公式（后面位置）中输出信号的误差会急剧增加。增大参数来减小阵元间距可以解决这个问题，但我们不能使网格非常精细均匀，因为这将显着增加计算的复杂性。我们采取使网格仅在存在信号的区域周围变细，来代替在所有情况下都形成通用的精细网格的做法，而这样的话就需要源的位置的近似知识，其可以通过使用粗网格来最初获得。形成非均匀网格的步骤如下：

1. 创建潜在信号位置的粗糙网格，网格不应太粗糙，以便不引入实质性偏差。例如，这里我们初始化；
2. 构造，其中。采用本文提出的在段的方法来获得稀疏系数矩阵的估计。获得源位置；
3. 将从网格分解为份。然后，我们就能够得到如图1所示的在峰位置附近的细化后的网格；
4. 形成一个新的转换矩阵，其中，然后继续做第二节（**二、The Principle Of The Algorithm**）中所述的操作。（？？？）

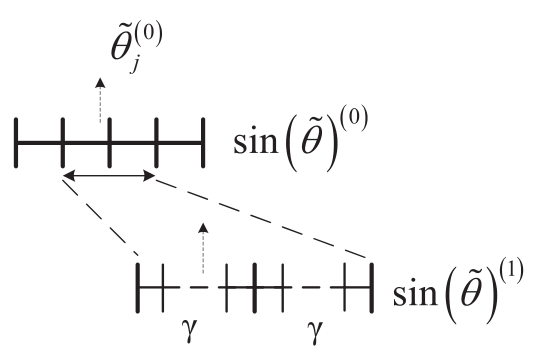


图1

**第五节、Simulation Results 仿真实验结果**

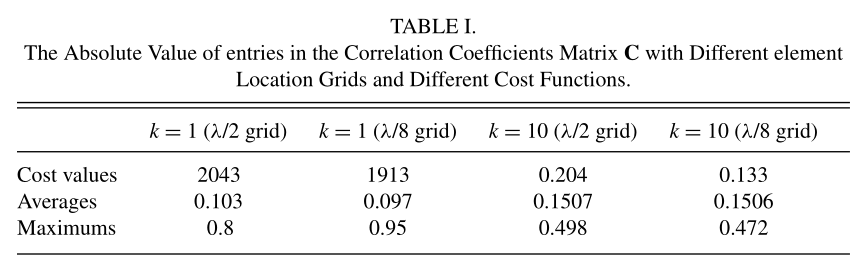
在本节中，我们将对三个方面进行仿真实验。首先，仿真实验结果回用于证明本文所提出的方法对阵元位置优化的有效性；其次，仿真实验会给出两种数字波束形成方法的波束图

；然后，本文会给出用蒙特卡洛实验来对本文所提算法的有效性进行验证的仿真实验；最后，给出了几个当目标不在网格中时的仿真实验。

**A、 The Optimization Of The Elements’ Positions 阵元位置优化**

阵列相关参数设置如下：阵元个数设为，压缩测量值个数为，离散角度值（稀疏基的个数）（这里的在许多文献中是设为了，注意区别），网格大小参数设为，这里考虑了两种不同的单元网格间隔：。第三节中遗传算法的部分参数设置如下：群体包含200个个体；截断选择（舍弃底部50％）；交叉和突变概率分别为80％和10％；代数设为100代。

图2和图3示出了具有不同元素位置网格和不同成本函数的相关系数矩阵C中的条目（不包括对角元素并且与表I相同）的绝对值的直方图分布。具有标签“无优化”的图，对应的是采样阵元随机选取同时阵元位置没有被优化的情况；具有标签“代价函数1”的图，对应的则是采样阵元随机选取，同时阵元位置经过第三节中介绍的、代价函数式（19）中的的情况下的方法优化；具有标签“代价函数2”的图，对应的则是采样阵元随机选取，同时阵元位置经过第三节中介绍的、代价函数式（19）中的的情况下的方法优化。



比较图2和图3，在的代价函数下，相关系数矩阵C中的项的绝对值的最大值小于阵元网格间隔小于的情况，可以从表I中得到相同的结论，这意味着当采用较小的阵元网格间距的时候能够获得较小的恢复误差。

在表I中，当时，矩阵的平均值是比较小的，但是其中存在许多较大的相关系数，而这些大的相关系数会提高恢复误差（严重影响恢复精度）。当时，矩阵的平均值仍然很小，淡同时矩阵元素的最大值可以被优化至小于0.5.

**B、** **The Evaluation Of Beam Performances 波束特性的评估**

在这一节中，会给出一些不同条件下的仿真实验结果。假设有四个空间信号从不同的方向入射，其中一个是期望信号，其余的三个信号均是干扰信号，记为、和。设置信干比为，假设线阵阵列由100个阵元组成，阵元间距为信号半波长。然后，我们有了压缩信号，并且利用第二节**B**中介绍的方法，从这些压缩信号中重建所有信道的回波信号。

1）、**正交投影算法波束形成仿真实验**

期望信号和三个干扰信号的来波方向设置为：0.1，-0.21,0.41以及-0.45（这里的小数值表示的是来波方向的正弦值），信噪比设为，干噪比设为，优化的阵元数目是：1,3,5,6,8,11,12,16,20,24,28,29,32,42,45,51,63,65,70,71,78, 81,85,87,89,

92,95,96,98以及100。分别利用恢复出的数据、用30个阵元接收的数据以及全阵列（100个阵元）接收的数据画出了如图4所示的波束图。从图4可以看出，当阵元个数从100减少到30但不改变天线孔径的时候，直接利用30个天线接收到的数据进行波束形成所得到的旁瓣水平式-8dB，而利用本文提出方法形成的波束则有着和采用原始全阵列（100个阵元）数据形成的波束相似的性能：在期望方向有着较深的凹陷，较低的旁瓣水平，同时也没有栅瓣。因此，该方法适用于正交投影算法。

2）、**迭代线性约束最小方差（LCMV）算法的仿真实验**

期望信号和三个干扰信号的来波方向设置为：-0.21，-0.48,0.31和0.42（这里的小数值表示的是来波方向的正弦值），信噪比设为，干噪比设为。在同1）相同的三种条件下形成波束并对它们进行比较，实验结果示于图5。从图5可以看出，当阵元个数从100减少到30但不改变天线孔径的时候，直接利用30个天线接收到的数据进行波束形成所得到的旁瓣水平式-9dB，而利用本文提出方法形成的波束则有着和采用原始全阵列（100个阵元）数据形成的波束相似的性能。

图6的曲线显示的是在三种不同的方法下，输出信干噪比随快拍数的变化而变化的曲线：当输出信干噪比被约束之后，通过所提出的方法利用恢复的数据得到的信干噪比，要小于使用全阵列的原始数据所得到的信干噪比，但比使用30个阵元的原始数据所得到的信干噪比要大得多。因此，该方法也适用于迭代LCMV法。

3）、**蒙特卡洛实验**

在雷达操作中，接收波束的方向通常由控制系统控制。从目标返回的接收期望信号的信噪比和自适应抑制之后的残余干扰功率是最重要的。在本文提出的基于压缩感知的自适应波束形成算法中，全阵列接收到的信号是从采样阵元上接收到的信号中进行恢复重建的。当使用正交匹配追踪算法对系数稀疏向量进行估计的时候，期望信号可能会因为利用采样阵元进行接收而接收到的信号的信噪比过低而丢失，这会导致期望信号在恢复信号和波束输出中的严重丢失。为了评估在波束输出中期望信号的信噪比损失的性能，我们定义输出信号的期望信号误差：



其中，表示数字波束形成系统归一化后的输出信号，而则表示的是没有带噪声的归一化后的期望信号。

为了在不同的信噪比，不同的干噪比和不同的信号方向的情况下验证算法的正确性，我们随机地选择了期望的信号和干扰的方向。然后，本文在下面给出的条件下进行了200此的蒙特卡洛实验。干扰的方向不在波束主瓣内。仿真1：；仿真2：。

图7(a)显示的是当信干比为，信噪比从时的平均期望信号误差。从图7(a)中我们可以看出，若信噪比小于0dB，在重建信号的时候有时会丢失期望信号，因此，恢复的期望信号被破坏，并且不能检测目标。但当信噪比大于0dB时，期望信号可以被稳定的恢复。图7(b)显示的是当信噪比为10dB、信干比从时的平均期望信号误差。从图7(b)可以看出，不管干扰信号有多大，在这种条件下都能够很稳定的恢复期望信号。

为了评估算法在干扰抑制的性能，本文完成了关于干扰方向上的旁瓣水平和零陷深度的蒙特卡罗实验。图8显示的是在信干比为时的两个仿真实验结果。图8(a)中的曲线显示的是采用正交投影算法的蒙特卡洛实验结果，图8(b)中的曲线显示的则是采用迭代LCMV算法的蒙特卡洛实验结果。旁瓣和零陷的水平值是在迭代完成之后获得的。从图可以看出，两种算法都能够获得较好的波束性能。

**C、 Simulations Of Targets Not On The Grid 目标不在网格上时的仿真实验**

在这一小节中，我们考虑目标不在网格上的情况。假设有两个空间信号从不同的方向入射，其中一个是期望信号，另一个是干扰信号。期望信号和干扰信号的方向是随机生成的（均不在网格上）。设置信噪比和信干比为：。然后，做如下所述的100次蒙特卡洛实验分析。

图9显示的是目标不在网格中时的仿真实验结果。从图9中可以看出，当期望信号或者干扰信号不在网格中时，算法是失败的。利用在第四节提出的方法，能够获得一个非均匀的精细网格（或）。在这个非均匀的精细网格，输出信号的误差得到了减少。为了观察波束图，期望信号和干扰信号的方向被设定为0.105和0.455（正弦值的大小）。图10显示的是时的波束图。从图中可以看出，波束图在干扰方向上零陷很深。因此，当目标不在网格上时，本文第四节提出的方法能够保证原算法有效。

**第六节、Conclusions 结论**

本文提出了一种新的基于压缩感知的接收端数字自适应波束形成方法，这是一种新的能够在不减少阵列孔径或降低波束性能的前提下实现减少阵元个数目的的方法，同时，这种方法还大大减少了射频前端的数量。根据空间中目标的稀疏性，该算法能够仅仅利用30个阵元接收到的数据，采用压缩感知算法完全准确地重建全阵列的整个信道信号。它还形成了基于恢复数据的数字波束。仿真实验验证了该算法的有效性，也显示这种新的自适应数字波束形成算法比基于30阵元的普通算法要好，同时有着和全阵列（100阵元）相似的性能。当信号比较弱的时候，算法会失效，期望信号在进行信号重建的时候会产生丢失。此时恢复出的数据使有损的，不能用以信号处理。因此，该算法仅适用于信噪比高于0dB的情况。